Εξετάσεις Σεπτεμβρίου 2020 - Απειροστικός Λογισμός 2

Διδάσκοντες Ε. Νικολιδάκης και Χ. Σαρόγλου

Στοιχειοθεσία Θεμάτων: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Κάτοχος Msc)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Ακολούθησε τις επόμενες μέρες και προφορική εξέταση σε όλους τους επιτυγχόντες και στους δύο διδάσκοντες.

Θέμα 1

(i) (1,25 μον.) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n^2+n-1}-\sqrt{n^2+n-1}}{n^{4/3}}$.

(ii) (1,25 μον.) Να εξεταστεί ως προς τη σύγκλιση η σειρά $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^{\ln n}}$.

Θέμα 2

Δίνεται η ακολουθία μη αρνητικών όρων $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Υποθέτουμε πως η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει. Να αποδείξετε ότι:

(i) (1,25 μον.) η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^{3/2}$ συγκλίνει.

(ii) (0,5 μον.) η σειρά $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^{3/2} b_n$ συγκλίνει, όπου $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τυχούσα φραγμένη ακολουθία.

Θέμα 3

(i) (1,25 μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^{2/5}$, $x>0$. Αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

(ii) (0,75 μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\dfrac{1}{x^3}$, $x>0$. Εξετάστε αν η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

Θέμα 4

(i) (1,25 μον.) Δίνεται η συνάρτηση $f\colon [0,1]\to\mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα:

$$\forall\, \varepsilon>0,\ \exists \text{ διαμέριση } P_\varepsilon=\{t_0=0<t_1<t_2<\cdots<t_n=1\},\ \text{ώστε}$$

$$\forall\, i=1,\ldots,n \text{ και } \forall\, x,y\in[t_{i-1},t_i],\ \text{να ισχύει } |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

(ii) (0,75 μον.) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int \frac{x^2-x+1}{(x+1)(x-2)^2}dx.$$

Θέμα 5

(i) (1 μον.) Δίνεται φραγμένη συνάρτηση $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Αποδείξτε πλήρως με χρήση του ορισμού ότι

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leq (b-a)\sup\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

(ii) (0,75 μον.) Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_3^\infty \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^4+1}}dx.$$